USTHB
Faculté d'Electronique et d'Informatique
Département d'Informatique
Master 2 SII
Représentation des connaissances 2 Année Universitaire 2022-2023

TD N° 1 :
Théorie des probabilités

Rappel :

Il existe deux manières d'introduire la notion de probabilité :
La probabilité *a priori*, « **subjective** » d'un événement est un nombre qui caractérise la croyance que l'on a que cet événement est réalisé avec plus ou moins de certitude avant l'exécution de l'expérience : l'événement est réalisé (probabilité 1) et l'événement n'est pas réalisé (probabilité 0).
La probabilité *empirique* **assimilée à une fréquence** est définie à partir d'expériences indéfiniment renouvelables. La probabilité d'un événement est alors la fréquence d'apparition de cet événement.

- Une expérience ou une épreuve est qualifiée d'**aléatoire** si on ne peut pas prévoir son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des résultats différents.
- Le résultat d'une expérience noté ω constitue une **éventualité** ou un **événement élémentaire**.
- l'ensemble des évènements élémentaires possibles pour une expérience aléatoire donnée constitue l'**espace fondamental** appelé **univers** ou **univers des possibles** noté Ω.

Un **événement** quelconque A est un ensemble d'évènements élémentaires et constitue **une partie de l'univers** des possibles Ω dont on sait dire à l'issue de l'épreuve s'il est réalisé ou non.

Système complet d'évenements

$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ forment un système complet d'évènements si les **parties** $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ de Ω constituent une **partition** de Ω telle que :

$$\forall i \quad A_i \neq \varnothing$$
$$\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing$$
$$\bigcup_i A_i = \Omega$$

Mesure de probabilité

On appelle **probabilité *P*** toute **application** de l'ensemble des évènements Ω dans l'intervalle [0,1], tel que : $P: \quad \varepsilon(\Omega) \to [0,1]$

$$A \mapsto P(A)$$

satisfaisant les propriétés (ou axiomes) suivantes

(P_1) $\forall A \in \varepsilon(\Omega) \quad P(A) \geq 0$

(P_2) $P(\Omega) = 1$

(P_3) $\forall A, B \in \varepsilon(\Omega)$ si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Probabilité combinatoire :

$$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Indépendance d'évenements :

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si l'on a :

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

Exercice 1 :

Une population animale comporte 1/3 de mâles et 2/3 de femelles. L'albinisme frappe 6% des mâles et 0,36% de femelles.

- Calculez la probabilité pour qu'un individu pris au hasard (dont on ignore le sexe) soit albinos.

Soient les évènements A={mâle} ; B={Albinos} Abarre={femelle} et Bbarre={non Albinos}
D'après la loi des probabilités totales :
P(B)=$\sum_{i=1}^{n} P(B|Ai) * P(Ai)$
D'où P(B)=P(B|A)*P(A)+P(B|Abarre)*P(ABarre)
P(B)=(0.06*1/3)+(0.0036*2/3)=0.0224
Soit 2.24% de la polpulation sont Albinos.

Exercice 2 :

Une boite contient 10 articles dont 4 sont défectueux. On tire trois objets de cette boite. Calculer la probabilité pour que ces trois objets soient défectueux.

Une boîte contient 10 articles dont 4 sont défectueux. On tire 3 objets de cette boîte.
Calculer la probabilité pour que ces 3 objets soient défectueux.
Pr(1^{er} défectueux) = 4/10
Pr($2^{ème}$ défectueux | 1^{er} défectueux) = 3/9

Pr(3ème défectueux | 1er et 2ème défectueux) = 2/8
Pr(1er et 2ème et 3ème défectueux) = 4/10×3/9×2/8 = 1/30.

Exercice 3: *

Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 100 et 200 objets. M_1 produit 5%de pièces défectueuses et M_2 en produit 6%.

- Quelle est la probabilité pour qu'un objet défectueux ait été fabriqué par la machine M_1 ?

L'évènement constaté, A, est donc la présence d'une pièce défectueuse et les causes sont les machines M1et M2. Compte tenu des productions de ces machines, on a P(M1)=1/3 et P(M2)=2/3. De plus, les probabilités conditionnelles de l'évènement A selon les machines sont P(A|M1)=5/100 et P(A|M1)=6/100 . En reportant ces valeurs dans la formule générale, on obtient /

- $$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{C_i}/\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{C_i})\mathbf{P}(\mathbf{A}/\mathbf{C_i})}{\sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{P}(\mathbf{C_k})\mathbf{P}(\mathbf{A}/\mathbf{C_k})}}$$
-
- $$P(M_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{100}}{(\frac{1}{3} \times \frac{5}{100}) + (\frac{2}{3} \times \frac{6}{100})} = \frac{5}{17} \approx 0.29$$

Exercice 4 :

Dans une population, un habitant sur 100 est atteint d'une maladie génétique A. On a mis au point un test de dépistage. Le résultat du test est soit positif (T) soit négatif (T) ; On sait que P(T|A)= 0.8 et P(T|Ā)=0.9.On soumet un patient au test. Celui-ci est positif.

- Quelle est la probabilité que ce patient soit atteint de la maladie A ?

Exercice 5 :

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées.

- Le vaccin est-il efficace ?

On suppose de plus que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades.

- Quelle est la proportion de malades dans la population ?

Pour le savoir, on compare la probabilité d'être malade $p(M)$ avec celle d'être malade sachant que l'on a été

Vaccine $p(M \mid V)$.

On a : $p(V)=1/3$

et $p(V \mid M) =2/ 15$

$p(M \mid V) = P(M\cap V)/P(V)=P(V|M)*P(M)/P(V)=2/15*3P(M)=2/5P(M)$

□

On a : $p(M \mid V) < p(M)$. Le vaccin est donc efficace.

2- On a donc : $P(M \mid V) =8/100=2/25$

Or, $P(M \mid V)=2/5P(M)$ d'où : $p(M) =1/5$

Il y a donc 20% de malades.

Exercice 6 :

On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est ½. On lance le dé choisi et on obtient 6.

- Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
- Quelle est la probabilité ce dé ne soit pas pipé ?

Soit T l'événement « le dé est pipé » et S l'événement « on obtient 6 »

D'après le théorème de Bayes :

1°) P(T|S)= P(T)*P(S|T) / P(T)*P(S|T)+P(Tbarre)*P(S|Tbarre)

avec :

P(T)=25/100 P(Tbarre)=75/100, P(S|T)=1/2 P(S|Tbarre)=1/2

$p(T / S)=1/2$

1- P(Tbarre|S)= P(Tbarre)*P(S|Tbarre) / P(T)*P(S|T)+P(Tbarre)*P(S|Tbarre)=1/2.

Remarque :

On peut calculer $p(T / S)$ directement en tenant compte de :

P(Tbarre|S)=1-P(T|S).

-

Exercice 7 :

Dans une clinique, 15% des patients ont attrapé un virus. On suppose qu'un test sanguin a été effectué sur un patient. Si le patient a attrapé le virus, le test sera positif avec une probabilité de 95%. Si le patient n'a pas attrapé le virus, le test sera positif avec une probabilité de 2%.

- Si le test est positif, quelle est la probabilité que le patient :
  - a attrapé le virus
  - n'a pas attrapé le virus
- Si le test est négatif, quelle est la probabilité que le patient :
  - a attrapé le virus
  - n'a pas attrapé le virus

Exercice 8 :
La population américaine classée par région a répondu à un sondage sur son attitude face à la législation de la drogue.

Région	**pour**	**contre**
Est	7.8%	22.2%
Autres	18.2%	51.8%

1- quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi par hasard soit pour la législation ? on peut compléter le tableau :

Région	**pour**	**contre**	**Total**
Est	7.8%	22.2%	30%
Autres	18.2%	51.8%	70%
Total	26%	74%	100%

Ainsi, 26 % des individus sont pour la législation de la drogue : P(pour)=0.26

2- quelle est la probabilité pour qu'un individu de la région Est soit pour la législation

Par définition de la loi des probabilités conditionnelle :
$P(Pour \mid est) = P(Pour \cap est) / P(est) = 7.8\%/30\% = 0.26$
D'où $P(Pour \mid est) = 0.26$

3- peut-on dire que les événements « appartient à la région Est » et « être pour la drogue » sont indépendants.
   Les événements est et pour sont indépendants en probabilités si la relation suivante est vérifiée :
   $P(pour \cap est) = P(pour) * P(est)$
   Or $P(Pour \cap est) = P(Pour \mid est) * P(est)$
   Ceci revient à vérifier que $P(pour \mid est) = P(pour)$ ce qui a été démontré en 1et 2. L'évènement pour est indépendant de l'évènement est.
   Aussi d'après le théorème de Bayes : $P(A|B) = P(B|A) * P(A) / P(B)$, il vient :
   $P(est|pour) = P(pour \mid est) * P(est) / P(pour) = p(est)$ car $P(pour|est) = P(pour)$
   Ainsi, $P(Pour|est) = P(pour)$ et $P(est|pour) = P(est)$: les évenements pour et est sont indépendants

Exercice 9 :
Considérons 3 boites de médicaments B1, B2 et B3. B1 contient 10 comprimés jaunes et 0 rouge. B2 contient 4 comprimés jaunes et 1 rouge. B3 contient 5 comprimés jaunes et 5 rouges.

1- On prend une boite au hasard et on tire un comprimé au hasard. Le comprimé est rouge. Calculez la probabilité pour que le comprimé tiré provienne de B1, de B2 et de B3.
2- On réunit les 25 comprimés de B1, B2 et de B3. On tire au hasard un comprimé et le comprimé est rouge. Calculez la probabilité que le comprimé tiré provienne de B1, de B2 et de B3.

Exercice 10:

Probabilités et fonctions de croyance: Exemple tiré du cours « concepts de base de la théorie fonctions de croyance » par David Mercier

a- Théorie des probabilités

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation du problème dans un cadre probabiliste :

- Expert 1 : $p_1(\{c_1\}) = p_1(\{c_2\}) = p_1(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$
- Expert 2 : $p_2(\{c_1\}) = p_2(\{c_2\}) = p_2(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$ (principe de raisonnement insuffisant (PRI))

Problème : deux opinions différentes, **équiprobabilité** et **incertitude totale**, sont représentées de la même façon.

- Besoin d'une théorie plus riche, plus flexible pour modéliser l'ignorance et l'arbitraire.
- Différentes théories :
  - Théorie des possibilités (Zadeh, 1978 ; Dubois and Prade 1980's-1990's) ;
  - Théorie des probabilités imprécises (Walley, 1990's) ;
  - Théorie des fonctions de croyance (Théorie de Dempster-Shafer, théorie de l'évidence, modèle des croyances transférables)(Dempster, 1968 ; Shafer, 1976 ; Smets 1980's-1990's).

Considérons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ (cadre de discernement) un ensemble fini de réponses à une certaine question Q d'intérêt.

Définition (fonction de masse)

Une fonction de masse de croyance sur Ω est une application $m : 2^\Omega \to [0, 1]$ t.q.

$$\sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1.$$

Tout $A \subseteq \Omega$, $m(A) > 0$ est appelé élément focal (EF) de m.

La fonction de masse m représente :

- l'état de connaissance d'un agent rationnel à un certain instant t, relativement à Q.

Masse $m(A)$: part de croyance allouée à A (et à aucun sous-ensemble strict).

Masse $m(\Omega)$: degré d'ignorance totale.

Résumé :

- fonction de masse de croyance = opinion pondérée ;
- à chaque alternative du monde est associé un nombre entre 0 et 1.

b- Les fonctions de croyances :

- Trois chevaux : c_1, c_2, c_3.
- Question : « qui va gagner la course ? »
- Expert 1 : « Les trois chevaux sont de même niveau. »
- Expert 2 : « Aucune idée. »

Le Derby d'Epsom (Géricault)

Modélisation dans le cadre des fonctions de croyance :

- Expert 1 : $m_1(\{c_1\}) = m_1(\{c_2\}) = m_1(\{c_3\}) = \frac{1}{3}$
- Expert 2 : $m_2(\{c_1, c_2, c_3\}) = 1$